PREMIER PROBLÈME

Première Partie

1. Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} 0 \text{ si } (a,b,c,d) = 0 \\ 1 \text{ si } ad-bc=0, (a,b,c,d) \neq 0 \\ 2 \text{ si } ad-bc \neq 0 \end{cases}$

2. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Il est évident que $rg(A) = 0$ si et seulement si le sous-espace véctoriel engendré par ses vecteurs colonnes est nul et cela équivaut á dire que$A = 0$; en particulier si A n'est pas nulle $rg(A) \geqslant 1$.
   (b) Si A est inversible, les vecteurs colonnes $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim vect(C_1(A), \ldots, C_n(A)) = n$ c'est à dire $rg(A) = n$. Réciproquement, si $rg(A) = n$ la famille $(C_1(A), \ldots, C_n(A))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc A est inversible.

3. On note f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. On a
$$rg(f_A) = \dim(\operatorname{Im}(f_A))$$
et comme $\operatorname{Im}(f_A) = vect(C_1(A), \ldots, C_n(A))$ alors $rg(A) = rg(f_A)$.

4. (a) On a $A = U.{}^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.(v_1 \ldots v_n)$; en notant $A = (a_{i,j})$ et en effectuant le produit matriciel $U.{}^tV$, on voit que $a_{k,\ell} = u_k v_\ell$ pour tout $(k,\ell) \in \{1,\ldots,n\}^2$.
   (b) Avec les notations de la question précèdente, on a : $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^tVU$.
   (c) D'aprés la question $(4.a)$, la $j^{ième}$ colonne de A est $C_j(A) = v_j U$.
   (d) On a $V \neq 0$ donc il existe j_0 tel que $v_{j_0} \neq 0$; ainsi $C_{j_0}(A) = v_{j_0}U \neq 0$ puisque $U \neq 0$; on en déduit que $rg(A) \geqslant 1$. D'autre part, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, $C_j(A) = v_j U = \dfrac{v_j}{v_{j_0}} C_{j_0}(A)$ cela montre que $rg(A) \leqslant 1$; d'où $rg(A) = 1$

5. (a) La matrice A est de rang 1, donc non nulle d'où l'existence d'un i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) On a $rg(A) = \dim vect((C_1(A), \ldots, C_n(A))) = 1$, donc les colonnes de la matrice A sont toutes proportionnelles à la colonne $C_{i_0}(A)$; ainsi, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
   (c) D'aprés le calcul précédent, les vecteurs colonnes de A sont $\lambda_1 C_{i_0}(A), \ldots, \lambda_n C_{i_0}(A)$; le calcul éffectué à la question $(4.a)$ montre alors que $A = C_{i_0}(A).(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, c'est à dire que $A = X.{}^tY$ avec $X = C_{i_0}(A)$ et $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

(d) Si $A = X_0.{}^tY_0 = X_1.{}^tY_1$ et $rg\,(A) = 1$, alors les vecteurs $X_0,\ X_1,\ Y_0$ et Y_1 sont non nuls. Posons $Y_0 =^t (y_1, \dots, y_n)$, $Y_1 =^t (z_1, \dots, z_n)$. Il existe un indice i_0 tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$; or $C_{i_0}(A) = y_{i_0}X_0 = z_{i_0}X_1$ donc $X_1 = \lambda X_0$ avec $\lambda = \dfrac{y_{i_0}}{z_{i_0}} \neq 0$. Par ailleurs, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(A) = y_jX_0 = z_jX_1 = \lambda z_jX_0$ donc $z_j = \dfrac{1}{\lambda}y_j$ et $Y_1 = \frac{1}{\lambda}Y_0$. Réciproquement, si $\lambda \neq 0$ alors on a bien $(\lambda X_0).^t\left(\dfrac{1}{\lambda}Y_0\right) = X_0.{}^tY_0 = A$. Ainsi, les couples cherchés sont de la forme $\left(\lambda X_0, \dfrac{1}{\lambda}Y_0\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $rg\,(A) = r > 0$; d'après un résultat du cours, on peut mettre A sous la forme $A = PJQ$ avec $J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, I_r la matrice identité d'ordre r et P, Q des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons E_{ij} la matrice de terme général $e_{k,l}$ avec $e_{k,l} = 1$ si $(k,l) = (i,j)$ et $e_{kl} = 0$ sinon ; alors $J = \sum\limits_{i=1}^{r} E_{ii}$ et par suite $A = P\left(\sum\limits_{i=1}^{r} E_{ii}\right)Q = \sum\limits_{i=1}^{r} PE_{ii}Q$, en plus $1 = rg\,(E_{ii}) = rg\,(PE_{ii}Q)$ puisque ces deux matrices sont équivalentes.

7. (a) Il est évident que si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_n$ sont tous nuls alors $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i = 0$. Réciproquement, si $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i = 0$ alors, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i\Big).Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.{}^tZ_i.Z_j = \sum_{i=1}^{n} ({}^tZ_jZj)Y_i,$$

et comme les vecteurs $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendants, on obtient $||Z_j||^2 =^t Z_jZ_j = 0$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$; donc les vecteurs $Z_1, \dots, Z_n$ sont tous nuls.

(b) Soit $(\lambda_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de réels tels que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{ij} X_i.{}^tY_j = 0$ alors

$$0 = \sum_{i=1}^{n} X_i.\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.{}^tY_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} X_i\ {}^t\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.Y_j\Big).$$

La question précédente montre alors que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.{}^tY_j = 0$. Par transposition on obtient $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}.Y_j = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ étant libre, on déduit de ce qui prééde que $\lambda_{ij} = 0$, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$; cela montre que la famille $(X_i.{}^tY_j)_{i,j}$ est libre et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, cette famille en constitue une base.

8. (a) La bilinéarité découle de la linéarité de la trace. Par ailleurs, on sait que, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}\,({}^tM.N) = \mathrm{Tr}\,({}^t({}^tM.N)) = \mathrm{Tr}\,({}^tN.M) = \langle N, M \rangle$; cela montre que la symtrie de la forme bilinéaire. Enfin, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, M \rangle = \mathrm{Tr}\,({}^tM.M) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} M_{ij}^2 \geqslant 0$, en plus

$$\langle M, M \rangle = 0 \Longleftrightarrow \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} M_{ij}^2 = 0 \Longleftrightarrow M = 0.$$

Cela prouve que l'application $(M, N) \longmapsto \langle M, N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Si X, X', Y et Y' sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\left\langle X.{}^tY, X'.{}^tY'\right\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\left(X.{}^tY\right).\left(X'.{}^tY'\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(Y.{}^tX.X'.{}^tY'\right),$$

et comme ${}^tX.X' \in \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Tr}\left({}^tX.X'.Y.{}^tY'\right) ={}^t X.X'\,\mathrm{Tr}\left(Y.{}^tY'\right) = \left({}^tX.X'\right).\left({}^tY.Y'\right)$. Ainsi

$$\left\langle X.{}^tY, X'.{}^tY'\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow {}^t X.X' = 0 \text{ ou } {}^tY.Y' = 0.$$

On en déduit que les matrices $X.{}^tY$ et $X'.{}^tY'$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs X , X' ou les vecteurs Y, Y' sont orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

(c) Si $(X_1, \ldots, X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont deux systèmes de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $\left(X_i.{}^tY_j\right)_{i,j}$ est orthonormée si et seulement si

$$\left\langle X_i.{}^tY_j \ , \ X_k.{}^tY_l\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{si} \quad (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

Or d'aprés le calcul précédent, on a $\langle X_i.{}^tY_j \ , \ X_k.{}^tY_l\rangle ={}^t X_i.X_k.{}^tY_j, Y_l$. Donc, pour que la famille $\left(X_i.{}^tY_j\right)_{i,j}$ soit orthonormée dans $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>\ \right)$, il suffit que les deux familles $(X_1, \ldots, X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ soient orthonormées dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

Deuxième Partie

Soit $A = U.{}^tV$ une matrice de rang 1 , $\alpha ={}^t V.U$ et $W = \left({}^tVV\right).U$

1. On a : $A^2 = \left(U.{}^tV\right).\left(U.{}^tV\right) = U.\left({}^tV.U\right).{}^tV = \alpha A$
2. Une récurrence permet de conclure que $A^k = \alpha^{k-1}A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; on en déduit que la matrice A est nilpotente si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ c'est à dire si et seulement si $\alpha = 0$ puisque A est non nulle.
3. Si A n'est pas nilpotente, d'après la question précédente $\alpha \neq 0$ et on a

$$\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}A^2 = \frac{1}{\alpha^2}\alpha A = \frac{1}{\alpha}A,$$

donc la matrice $\frac{1}{\alpha}A$ est celle d'un projecteur.

4. (a) la matrice A est de rang 1 et comme $n \geqslant 2$ alors A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A ; le sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0, qui n'est rien d'autre que son noyau noté $\ker A$, est par définition égal à

$$\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AY = 0\} = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ U^tVY = 0\right\}$$

Or, comme $U \neq 0$ on a l'équivalence $U^tVY = \left({}^tVY\right).U = 0 \Longleftrightarrow {}^t VY = 0$; on en déduit que $\ker A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tVY = 0\}$ et d'aprés le théorème du rang $\dim\ker A = n - rg(A) = n - 1$.

(b) On a $AU = U^tVU = \left({}^tVU\right).U = \alpha U$, et comme $U \neq 0$ alors α est une valeur propre de A. Par ailleurs, le fait que la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice est toujours inférieure ou égale à son ordre, adjoint au fait que $\dim\ker A = n - 1$ permet d'affirmer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α est de dimension 1 et ce sous-espace propre vaut $\mathbb{R}U$.

(c) Si $\alpha = 0$, la matrice A est nilpotente et 0 est son unique valeur propre.
Si $\alpha \neq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres qui sont 0 et α puisque la somme des sous-espaces propres associés est égale n.

5. si $\alpha \neq 0$, d'aprés la question (4) , 0 et α sont les valeurs propres de A et la somme de leur sous-espaces propres est égale l'ordre de A, donc A est diagonalisable.
En prenant une base $(U_1, \ldots, U_{n-1})$ de $\ker(A)$ et une base (U_n) de $\ker(A - \alpha I_n)$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(U_1, \ldots, U_n)$ est $diag\,(0, \ldots, 0, \alpha)$. Donc A est semblable à $diag\,(0, \ldots, 0, \alpha)$ puisque ces deux matrices représentent le même endomorphisme f.

6. On suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Comme 0 est la seule valeur propre de A, la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est nulle. Comme $A \neq 0$ alors A n'est pas diagonalisable.
   (b) $AU = \alpha U = 0$ donc $U \in \ker f$ et comme le vecteur W est colinéaire à U et $W \neq 0$, le théorème de la base incomplte permet de compléter W en une base $\big(E_1, \ldots, E_{n-2}, W\big)$ de $\ker f$ qui est de dimension $n-1$.
   (c) On a $AV = U{}^tVV ={}^t VV.U = W \neq 0$ donc $W \notin \ker f$ et par suite la famille $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est libre, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   La matrice de f dans la base $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Soit A une matrice de rang 1, d'après les questions $(1.5.c)$ et $(1.4.b)$, on peut écrire A sous la forme $A = U^tV$ où U, V sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{Tr}\,(A) ={}^t VU$; si plus A est de trace nulle, alors d'après la question $(2.6.c)$, A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. La transitivité de la relation de similitude permet enfin de conclure que deux matrices de rang 1 et de tarce nulle sont semblables.

DEUXIÈME PROBLÈME

I. Résultats préliminaires

1. (a) Pour tout nombre complexe non nul z, on a $|P(z)| = \left|a_d z^d\right| \left|a_0 z^{-d} + a_1 z^{1-d} + ... + a_{d-1} z^{-1} + 1\right|$ et comme $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \left|a_0 z^{-d} + a_1 z^{1-d} + ... + a_{d-1} z^{-1} + 1\right| = 1$, on déduit que
$$|P(z)| \underset{|z| \to +\infty}{\sim} \left|a_d z^d\right| = |a_d|\,|z|^d .$$
   (b) On vient d'établir que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{|P(z)|}{|a_d z^d|} = 1$; on en déduit par définition de la limite qu'il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq R$, on ait $\left|\frac{|P(z)|}{|a_d z^d|} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$, et donc $\frac{1}{2}|a_d|\,|z|^d \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_d|\,|z|^d \leq 2\,|a_d|\,|z|^d$.

2. (a) L'application $(x,y)\longmapsto |P(x+iy)|$ est la composée de la fonction $(x,y)\longmapsto P(x+iy\ )$, polynômiale en x et y donc continue sur $\mathbb{R}^2$, et de la fonction $z\longmapsto |z|$ qui est 1-lipschitziènne sur $\mathbb{C}$; on déduit que $(x,y)\longmapsto |P(x+iy)|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Or on sait que, toute fonction réelle continue sur une partie férmée bornée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et y atteint ses bornes, d'où le résultat demandé puisque tout disque férmé borné de $\mathbb{R}^2$ est une partie férmée borée de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\{|P(z)|\ ;\ z\in\mathbb{C}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée par 0 ; elle admet donc une borne inférieure notée m.Comme $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|P(z)|=+\infty$ alors d'après la définition de la limite, il existe $R'>0$ tel que, pour tout nombre complexe z vérifiant $|z|\geq R'$, on ait $|P(z)|\geq m+1$. On en déduit que

$$m=\inf_{z\in\mathbb{C}}|P(z)|=\inf_{|z|\leq R'}|P(z)|=\inf_{x^2+y^2\leq R'^2}|P(x+iy)|,$$

   quantité atteinte, d'après la question 2.(a), en un point (x_0,y_0) du disque fermé de $\mathbb{R}^2$, de centre 0 et de rayon R'. On en déduit que la fonction $z\longmapsto |P(z)|$ atteint sa borne inférieure en $z_0=x_0+iy_0$.

II. Première méthode analytique

1. (a) La fonction $t\longmapsto Q(\alpha t)$ est polynômiale en t, donc continue ; on déduit de la continuité en 0 de cette fonction que $\lim\limits_{t\to 0}\alpha^kQ(\alpha t)=0$ (puisque $Q(0)=0$), ce qui se traduit par l'éxistence de $\eta>0$ tel que $|\alpha^kQ(\alpha t)|\leq\dfrac{1}{2}$ pour $t\in]0,\eta[$. Le résultat en découle si l'on choisit $t_0\in]0,\min(1,\eta)[$.

   (b) $\alpha^k=\frac{-1}{b}$ donc $Q_1(\alpha t_0)=1-t_0^k+t_0^k\alpha^kQ(\alpha t_0)$. Comme $t_0\in]0,1[$, l'inégalité triangulaire adjointe à 1.(a) donnent $|Q_1(\alpha t_0)|\leq 1-t_0^k+t_0^k|\alpha^kQ(\alpha t_0)|\leq 1-\frac{t_0^k}{2}<1$.

2. On considère comme indiqué le polynôme Q_1 tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $Q_1(z)=\dfrac{P(\gamma+z)}{P(\gamma)}$. Le coefficient constant de Q_1 vaut 1 et Q_1 s'écrit alors sous la forme $Q_1=1+bX^k+X^kQ$, où Q est un polynôme complexe vérifiant $Q(0)=0$ et k désigne la valuation du polynôme Q_1-1 ; en particulier $k\geq 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente et déduire l'existence d'un complexe δ ($\delta=\alpha t_0$) tel que $|Q_1(\delta)|<1$, ce qui est équivaut à $|P(\delta)|<|P(\gamma)|$.

3. L'existence de z_0 est assurée par la question I-2.(b). Alors $P(z_0)=0$; sinon, en appliquant la question précédente il existerait un complexe z_1 tel que $|P(z_1)|<|P(z_0)|$, ce qui contredirait le caractère minimal de la valeur $|P(z_0)|$.

III. Deuxième méthode analytique

On suppose que le polynôme P s'écrit $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $n\geq 1$ et $a_n\neq 0$. Son polynôme dérivé, noté P', s'écrit alors $P'=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}$.

1. La fonction $r\longmapsto P(re^{i\theta})=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kr^ke^{ik\theta}$ est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) de dérivée la fonction $r\longmapsto\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kr^{k-1}e^{ik\theta}=e^{i\theta}P'(re^{i\theta})$; on en déduit que

l'application partielle $r \longmapsto \dfrac{1}{P(re^{i\theta})}$ de f est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence de la dérivée partielle de f par rapport à r, avec pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = -e^{i\theta}\dfrac{P'(re^{i\theta})}{\big(P(re^{i\theta})\big)^2}$.

De même la fonction $\theta \longmapsto P(re^{i\theta}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\theta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) de dérivée la fonction $\theta \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ika_k r^k e^{ik\theta} = ire^{i\theta}P'(re^{i\theta})$; ceci montre que$f$ admet une dérivée partielle par rapport à θ avec pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = -ire^{i\theta}\frac{P'(re^{i\theta})}{\big(P(re^{i\theta})\big)^2} = ir\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta).$$

De plus, comme les applications $(x,y) \longmapsto P(x+iy)$ et $(x,y) \longmapsto P'(x+iy)$ sont continues, la première ne s'annulant pas, et d'après la continuité de l'application

$$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

on déduit, vues leur expressions, que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et par suite f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) F est une fonction définie par une intégrale (sur le segment $[0,2\pi]$) dépendant d'un paramétre. On applique donc le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (cas d'un segment) : f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$), elle est en particulier continue sur $\mathbb{R} \times [0,2\pi]$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ continue elle aussi. On déduit que F est de classe C^1 et donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout réel r,

$$F'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} -e^{i\theta}\frac{P'(re^{i\theta})}{\big(P(re^{i\theta})\big)^2}\ d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)\ d\theta.$$

Le théorème fondamental de calcul des intégrales s'applique et, compte tenu de la 2π-péridicité de f par rapport à θ, on obtient $F'(r) = \dfrac{-i}{r}\big(f(r,2\pi) - f(r,0)\big) = 0$, pour tout $r \in \mathbb{R}$.

(b) Comme P n'est pas constant alors d'après la question 1.(b) des préliminaires, il existe $R > 0$ tel que pour tout nombre complexe z tel que $|z| \geq R$ on ait

$$\frac{1}{2}|a_n|\,|z|^n \leq |P(z)|,$$

de sorte que pour $r \geq R$, $|F(r)| \leq \dfrac{4\pi}{|a_n|\,r^n}$ ce qui entraîne que $\displaystyle\lim_{r \longrightarrow +\infty} F(r) = 0$.

(c) D'après son expression $F(0) = \dfrac{2\pi}{P(0)}$. Or, F' étant nulle sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, F est constante de valeur $F(0) \neq 0$, ce qui contredit le fait que $\displaystyle\lim_{r \longrightarrow +\infty} F(r) = 0$.

On déduit donc de ce qui précède que notre hypothèse de départ est fausse d'où le théorème de D'Alembert-Gauss : Tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine complexe.
